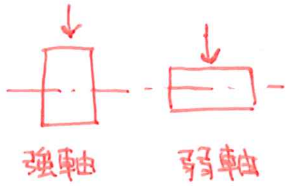
$P_k = \dfrac{\pi^2 EI}{L_k^2}$ （EI：曲げ剛性）

I：弱軸方向の断面二次モーメント（変形しやすい方向）



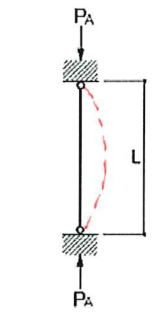
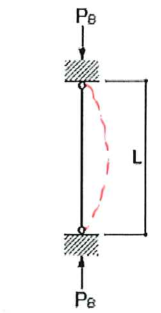
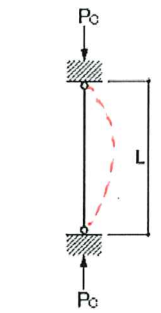
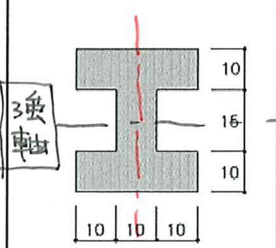
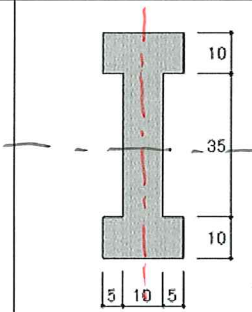
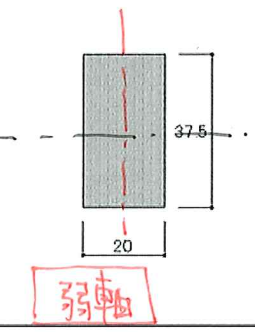
力学５（座屈の過去問題）

１シリーズ（柱の座屈長さの理論解）

問題コード 21061

Eが同じ

図のような支持条件及び断面で同一材質からなる柱A，B，Cにおいて，中心圧縮の弾性座屈荷重の理論値P_A，P_B，P_C の大小関係を求めよ．ただし，図中における寸法の単位はcmとする．

柱	A	B	C
支持条件	両端ピン（水平移動拘束）	両端ピン（水平移動拘束）	両端ピン（水平移動拘束）
断面			

インプットのコツ「02. 断面の性質」の「基準軸」の説明を参照してください。

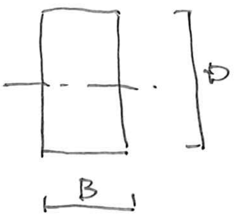
⇒ 材質，柱の長さ，拘束条件が同じ
→ 座屈長さ L_k は同じ。

⇓

この問題において，座屈荷重の大小関係は，A～Cの弱軸方向の断面二次モーメントの大小関係と比例する

この問題のポイント

断面二次モーメント I



$I = \dfrac{B \times D^3}{12}$

「基準軸と平行」×「基準軸と直交」の3乗

→ 基準軸を横にした図で考えるのがポイント!!

Aの面積

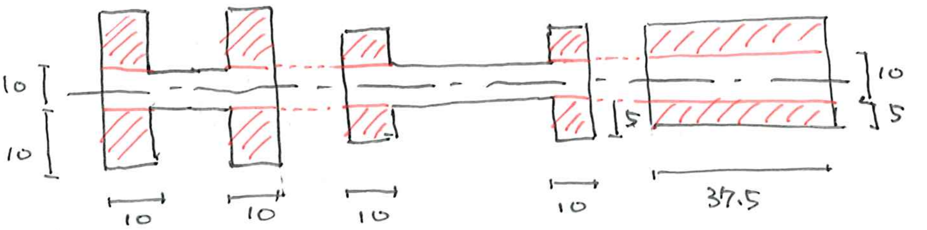
30×10×2＋10×15 ＝ 750 cm²

Bの面積

20×10×2＋10×35 ＝ 750 cm²

Cの面積

20×37.5 ＝ 750 cm²



10×10×2 ＝ 200.　10×5×2 ＝ 100.　37.5×5 ＝ 187.5

$I_A > I_C > I_B$ より $P_A > P_C > P_B$

解説：

弾性座屈荷重をP_Kとすると，$P_K = \dfrac{\pi^2 EI}{L_K{}^2} = \pi^2 E \dfrac{I}{L_K{}^2}$　となる.

$\pi^2 E$ は共通であるため，弾性座屈荷重の大小関係は，$\dfrac{I}{L_K{}^2}$ の値で決まる.

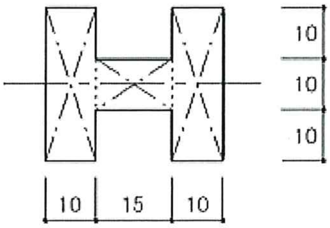
また，柱の長さ及び支持条件が同一であるため，座屈長さL_Kは等しくなる.
よって，基準軸（弱軸）に関する断面二次モーメントＩの大小関係が弾性座屈荷重P_Kの大小関係となる.

柱Aの断面二次モーメントをI_Aとすると，

$$I_A = \frac{15 \times 10^3}{12} + \frac{10 \times 30^3}{12} \times 2$$

$$= \frac{15{,}000 + 540{,}000}{12}$$

$$= \frac{555{,}000}{12} \quad \mathrm{cm}^4$$



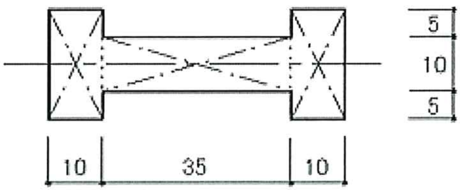
A

柱Bの断面二次モーメントをI_Bとすると，

$$I_B = \frac{35 \times 10^3}{12} + \frac{10 \times 20^3}{12} \times 2$$

$$= \frac{35{,}000 + 160{,}000}{12}$$

$$= \frac{195{,}000}{12} \quad \mathrm{cm}^4$$

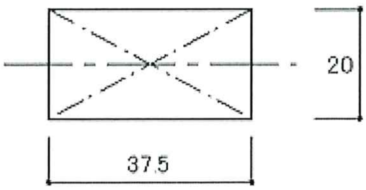


B

柱Cの断面二次モーメントをI_Cとすると，

$$I_C = \frac{37.5 \times 20^3}{12}$$

$$= \frac{300{,}000}{12} \quad \mathrm{cm}^4$$



C

よって，$I_A > I_C > I_B$であるので，$P_A > P_C > P_B$となる.

解答：　$P_A > P_C > P_B$

等質 = Eは同じ.　等断面 = Iは同じ.

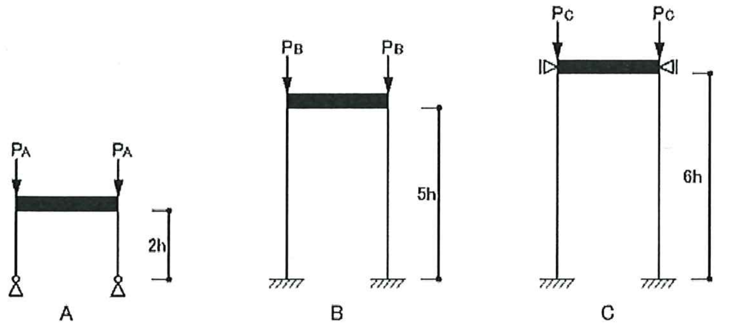
$P_K = \dfrac{\pi^2 EI}{L_K^2}$　　ポイント!

2 シリーズ（ラーメン架構の座屈長さ）

問題コード 29061

図のような構造物A, B, C の柱の弾性座屈荷重をそれぞれ P_A, P_B, P_C としたとき，それらの大小関係を求めよ．ただし，全ての柱は等質等断面で，梁は剛体であり，柱及び梁の自重，柱の面外方向の座屈は無視する．

「梁が剛体」のラーメン架構は，1本柱の座屈長さ（4タイプ）のどれかになります



$_AL_K = \underline{2} \times 2h = 4h$

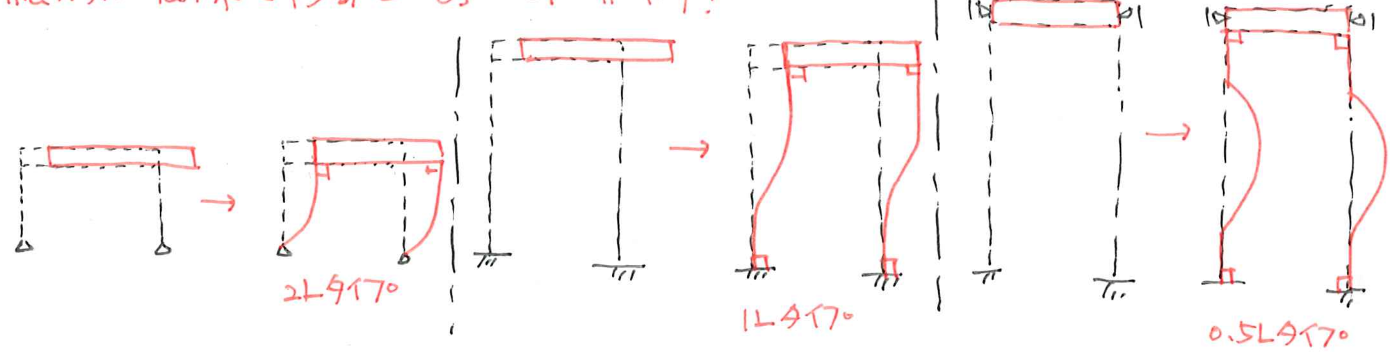
$_BL_K = \underline{1} \times 5h = 5h$

$_CL_K = \underline{0.5} \times 6h = 3h$

より　$_CL_K < {_AL_K} < {_BL_K}$

$\therefore\ P_C > P_A > P_B$

絵的に「剛梁を移動させる」ことがポイント!



2'シリーズ（梁の変形を考慮したラーメン架構の座屈長さ）

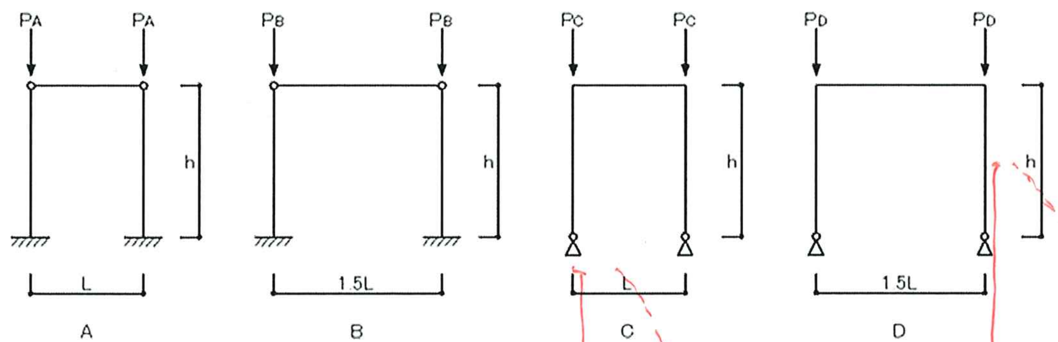
問題コード 19061

図のような構造物A, B, C, Dの柱の弾性座屈荷重をそれぞれ P_A, P_B, P_C, P_D としたとき，それらの大小関係を求めよ．ただし，すべての柱及び梁は等質等断面であり，「柱及び梁の重量」及び「柱の面外方向の座屈及び梁の座屈」については無視するものとする．

$P_K = \dfrac{\pi^2 EI}{L_K^2}$

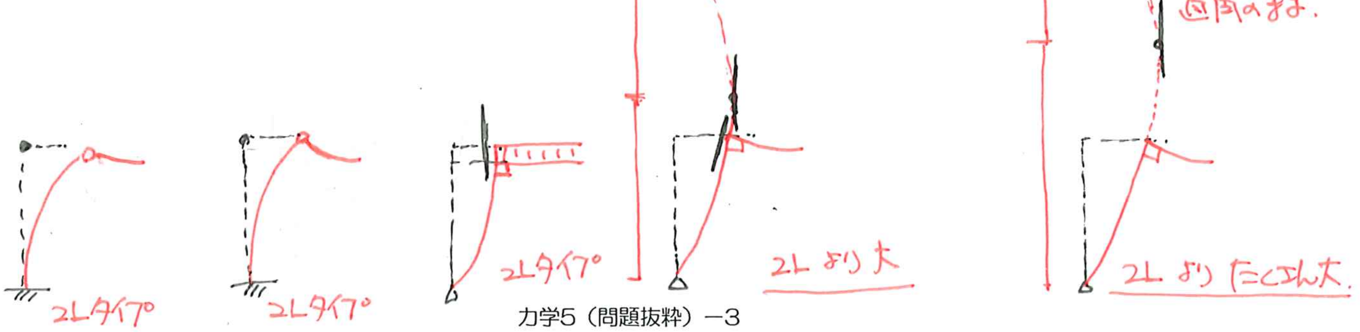
$_AL_K = {_BL_K} = 2h < {_CL_K} < {_DL_K}$ より

$P_A = P_B > P_C > P_D$



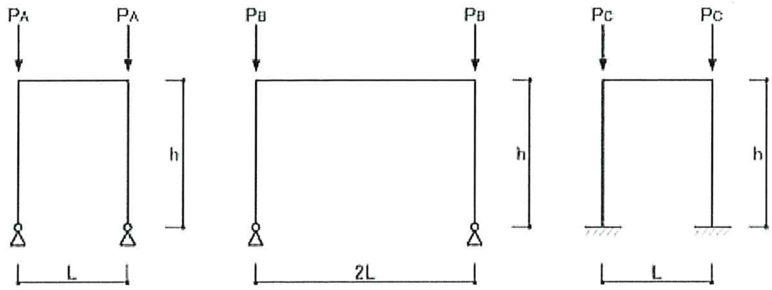
・梁がS字に変形する

・柱と梁の端部は直角のまま.



問題コード　02061

図のようなラーメンA，ラーメンB及びラーメンCの柱の弾性座屈荷重をそれぞれP_A，P_B 及びP_Cとしたとき，これらの大小関係として，正しいものは，次のうちどれか．
ただし，全ての柱及び梁は等質等断面の弾性部材であり，「柱及び梁の重量」及び「柱の面外方向の座屈及び梁の座屈」については無視するものとする．



ラーメンA　　ラーメンB　　ラーメンC

1. $P_A = P_C > P_B$
2. $P_B > P_A > P_C$
3. $P_C > P_A = P_B$
4. $P_C > P_A > P_B$

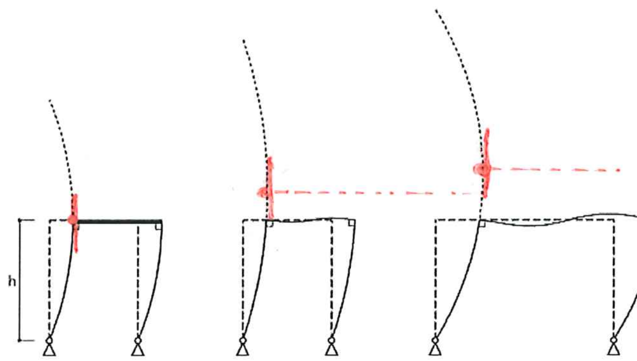
解説：

弾性座屈荷重を P_k とすると，

$$P_k = \frac{\pi^2 EI}{L_k^2} = \pi^2 EI \times \frac{1}{L_k^2} = k \times \frac{1}{L_k^2} \quad となる．$$

k は共通の定数であるため弾性座屈荷重の大小関係は $\frac{1}{L_k^2}$ の値で決まる．

ラーメンAとラーメンBについては，梁が剛体であれば座屈長さはともに $L_k = 2h$ となるが，ラーメンA，ラーメンBともに梁は剛体でないため，ともに座屈長さは 2h より長くなる．
梁は，等質等断面であるので，ラーメンAより梁の長さの長いラーメンBの方が梁の曲げ変形が大きくなるため，ラーメンBの柱の座屈長さの方がラーメンAより長くなる．



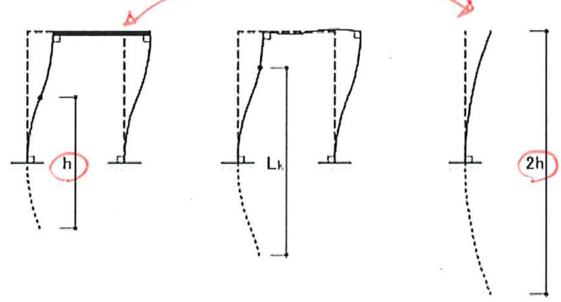
梁が剛体　　ラーメンA　　ラーメンB

$L_k = 2h$　　$2h < {}_AL_k < {}_BL_k$

ラーメンCについては，梁が剛体であれば座屈長さは $L_k = h$ となり，梁の剛性が 0（柱頭自由）であれば $L_k = 2h$ となるが，ラーメンCは梁の剛性はその間にあるので，座屈長さ ${}_CL_k$ は，

$h < {}_CL_k < 2h$

となる．

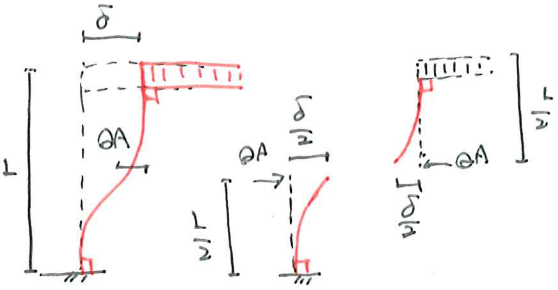


よって，

座屈長さは，${}_CL_k < 2h < {}_AL_k < {}_BL_k$　となるので，

座屈荷重は，$P_C > P_A > P_B$　となる．

解答：4

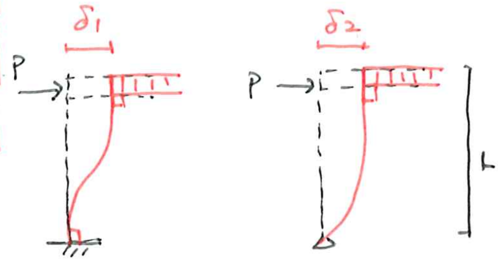


力学５（たわみの過去問題）

$$\frac{\delta}{2} = \frac{Q_A \times \left(\frac{L}{2}\right)^3}{3EI} \text{ より}$$

$$\delta = \frac{\cancel{2}^{1} Q_A}{3EI} \times \frac{L^3}{\cancel{8}_{4}} = \frac{Q_A \times L^3}{12EI}$$

○この２つは覚える！

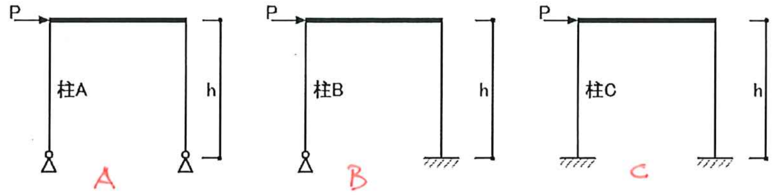


$$\delta_1 = \frac{PL^3}{12EI} \qquad \delta_2 = \frac{PL^3}{3EI}$$

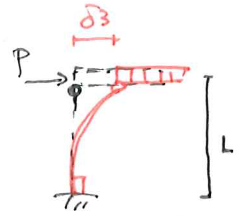
１シリーズ（柱の負担せん断力）

問題コード　02031

図のような柱脚の支持条件が異なる3つのラーメンに水平荷重Pが作用する場合，柱A，柱B及び柱Cに生じるせん断力をそれぞれQ_A，Q_B及びQ_Cとしたとき，それらの大小関係として，正しいものは，次のうちどれか．ただし，全ての柱は等質等断面の弾性部材とし，梁は剛体とする．



1. $Q_A > Q_B > Q_C$
2. $Q_A = Q_C > Q_B$
3. $Q_B > Q_A = Q_C$
4. $Q_C > Q_B > Q_A$

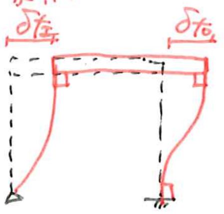


$$\delta_3 = \frac{PL^3}{3EI}$$

架構AとCは左右対称であるので，$Q_A = Q_C = \frac{P}{2}$

※柱脚固定でも柱頭がピン接合なら $\frac{PL^3}{3EI}$ となることに注意！

架構Bは



$$\delta_{左} = \frac{Q_{左} \cdot h^3}{3EI}, \quad \delta_{右} = \frac{Q_{右} \cdot h^3}{12EI}$$

$\delta_{左} = \delta_{右}$ より

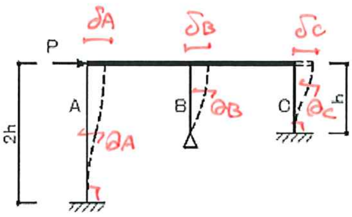
$$\frac{Q_{左} \cdot h^3}{3EI} = \frac{Q_{右} \cdot h^3}{12EI}$$

$$\frac{Q_{左}}{Q_{右}} = \frac{1}{4} \text{ より } Q_{左} = \frac{P}{5}, \ Q_{右} = \frac{4}{5}P \Rightarrow \underset{\left(\frac{P}{2}\right)}{Q_A} = \underset{\left(\frac{P}{2}\right)}{Q_C} > \underset{\left(\frac{P}{5}\right)}{Q_B}$$

問題コード　26061

図のような水平力Pが作用する骨組において，柱A，B，Cの水平力の分担比$Q_A : Q_B : Q_C$として，正しいものは，次のうちどれか．ただし，3本の柱は全て等質等断面の弾性部材とし，梁は剛体とする．

	Q_A	:	Q_B	:	Q_C
1.	1	:	1	:	4
2.	1	:	2	:	4
3.	1	:	2	:	8
4.	1	:	4	:	8



$$\delta_A = \frac{Q_A \times (2h)^3}{12EI}, \quad \delta_B = \frac{Q_B \times h^3}{3EI}, \quad \delta_C = \frac{Q_C \times h^3}{12EI}$$

$\delta_A = \delta_B$ より

$$\frac{Q_A \times 8h^3}{12EI} = \frac{Q_B \times h^3}{3EI}$$

$$\frac{Q_A}{Q_B} = \frac{1}{2} \text{ より } Q_A : Q_B = 1:2$$

$\delta_A = \delta_C$ より

$$\frac{Q_A \times 8h^3}{12EI} = \frac{Q_C \times h^3}{12EI} \Rightarrow Q_A : Q_B : Q_C = 1:2:8$$

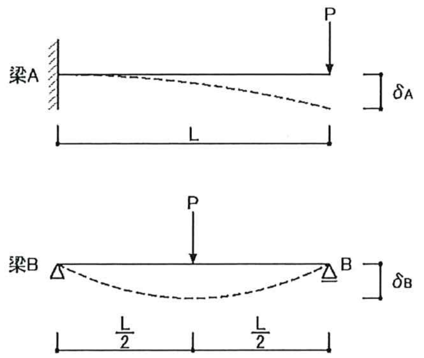
$$\frac{Q_A}{Q_C} = \frac{1}{8} \text{ より } Q_A : Q_C = 1:8$$

2シリーズ（公式直接利用タイプ）

問題コード 05011

図のような集中荷重P を受ける梁A 及びB の荷重点に生じるたわみ δ_Aとδ_Bとの比として，正しいものは，次のうちどれか．ただし，梁A 及びB は同一断面で，全長にわたって等質等断面の弾性部材とし，自重は無視する．

	δ_A : δ_B
1.	4 : 1
2.	8 : 1
3.	16 : 1
4.	32 : 1



	P	ω	M
	$\delta = \frac{PL^3}{48EI}$ $\theta =$	$\delta =$ $\theta =$	
	$\delta = \frac{PL^3}{3EI}$ $\theta =$	$\delta =$ $\theta =$	$\delta =$ $\theta =$

$$\delta_A = \frac{PL^3}{3EI} ,\quad \delta_B = \frac{PL^3}{48EI}$$

$$\frac{\delta_A}{\delta_B} = \frac{PL^3}{3EI} \Big/ \frac{PL^3}{48EI}$$

分数で割る
〃
分子と分母を逆にしてかける

$$= \frac{PL^3}{3EI} \times \frac{48EI}{PL^3}$$

$$= 16$$

$$= \frac{16}{1}$$

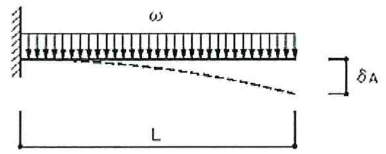
比は「上：下は上：下」

$$\delta_A : \delta_B = 16 : 1$$

問題コード 25021

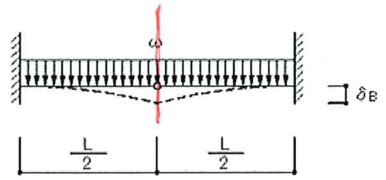
図ような梁A及びBに等分布荷重ωが作用したときの曲げによる最大たわみ δ_A とδ_B との比を求めよ．ただし，梁A及びBは等質等断面の弾性部材とする．

	P	ω	M
	$\delta =$ $\theta =$	$\delta =$ $\theta =$	
	$\delta =$ $\theta =$	$\delta = \frac{wL^4}{8EI}$ $\theta =$	$\delta =$ $\theta =$



A

$$\delta_A = \frac{wL^4}{8EI}$$



B

$$\delta_B = \frac{w \times (\frac{L}{2})^4}{8EI}$$

「割る数」は「逆数（分子と分母を上下逆）にしてかける数」に変換する

$$\frac{\delta_A}{\delta_B} = \frac{wL^4}{8EI} \Big/ \frac{w \times (\frac{L}{2})^4}{8EI}$$

$$\Rightarrow \delta_A : \delta_B = 16 : 1$$

$$= \frac{wL^4}{8EI} \times \frac{8EI}{w \times \frac{L^4}{16}}$$

「分母にある $\frac{1}{16}$」は「分子に16」となる．

$$= \frac{wL^4}{8EI} \times \frac{8EI \times 16}{w \times L^4}$$

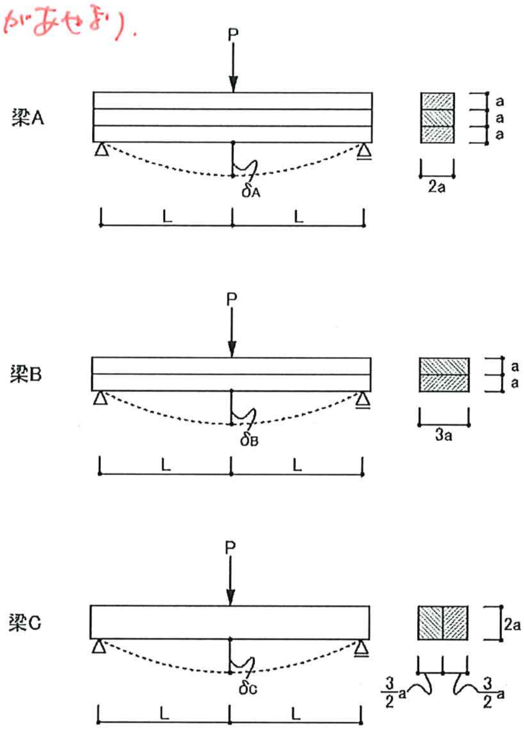
$$= 16$$

問題コード　04021

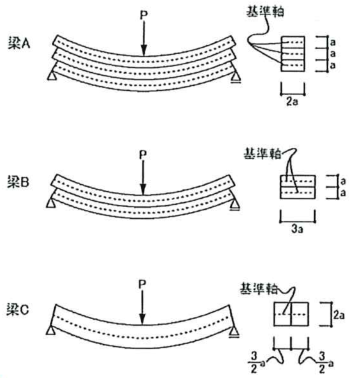
EとLが同じ

たぶん．問題文があやまり．

図のように，材料とスパンが同じで，断面が異なる単純梁A，B及びCの中央に集中荷重Pが作用したとき，それぞれの梁の曲げによる中央たわみ δ_A，δ_B 及び δ_C の大小関係として，正しいものは，次のうちどれか．ただし，それぞれの梁は全長にわたって等質等断面の弾性部材とし，自重は無視する．また，梁を構成する部材の接触面の摩擦及び接着はないものとする．



1. $\delta_A < \delta_B = \delta_C$
2. $\delta_A = \delta_B < \delta_C$
3. $\delta_B = \delta_C < \delta_A$
4. $\delta_C < \delta_A = \delta_B$



$$I_A = \frac{2a \times a^3}{12} \times 3 = \frac{6a^4}{12}$$

$$I_B = \frac{3a \times a^3}{12} \times 2 = \frac{6a^4}{12} = I_A$$

$$I_C = \frac{\frac{3}{2}a \times (2a)^3}{12} \times 2 = \frac{24a^4}{12} = 4I_A$$

EとLとPは同じであるので

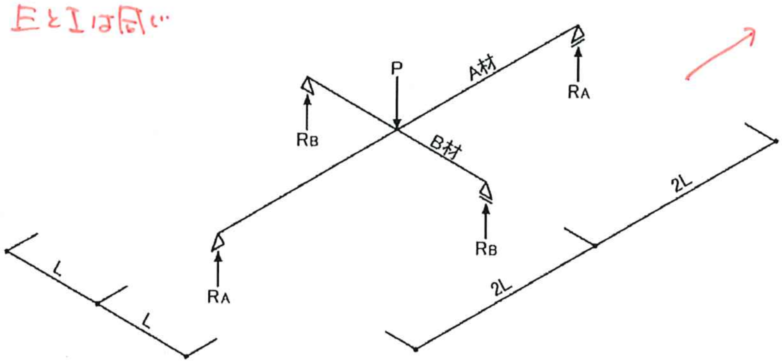
$$\delta_A = \delta_B > \delta_C \left(= \frac{\delta_A}{4}\right)$$

	P	w	M
	$\delta = \frac{PL^3}{48EI}$ $\theta =$	$\delta =$ $\theta =$	
	$\delta =$ $\theta =$	$\delta =$ $\theta =$	$\delta =$ $\theta =$

問題コード　02021

図に示す交差梁のA材とB材の交点に集中荷重Pが作用したときのA材，B材の支点の反力をそれぞれ R_A，R_B とするとき，その比として，正しいものは，次のうちどれか．なお，A材とB材は等質等断面とし，梁の重量は無視するものとする．

EとIは同じ



	R_A	:	R_B
1.	1	:	1
2.	1	:	2
3.	1	:	4
4.	1	:	8

「交差梁」とはA材とB材の中央のたわみは同じということ ⟶ ポイント．

外力PがA材に P_A，B材に P_B 流れるとすると

$$\delta_A = \frac{P_A \times (4L)^3}{48EI}, \quad \delta_B = \frac{P_B \times (2L)^3}{48EI}$$

$\delta_A = \delta_B$ より $\frac{P_A \times 4^3 \times L^3}{48EI} = \frac{P_B \times 2^3 \times L^3}{48EI}$

$\frac{P_A}{P_B} = \frac{2^3}{4^3} = \frac{2\times2\times2}{4\times4\times4} = \frac{1}{8}$ より $P_A : P_B = 1:8$

$P_A + P_B = P$ より $P_A = \frac{P}{9}$，$P_B = \frac{8}{9}P$

$R_A = \frac{P_A}{2} = \frac{P}{18}$．　$R_B = \frac{P_B}{2} = \frac{4P}{9}$．

$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{P}{18} \Big/ \frac{4P}{9} = \frac{P}{18} \times \frac{9}{4P} = \frac{1}{8}$$

$R_A : R_B = 1:8$